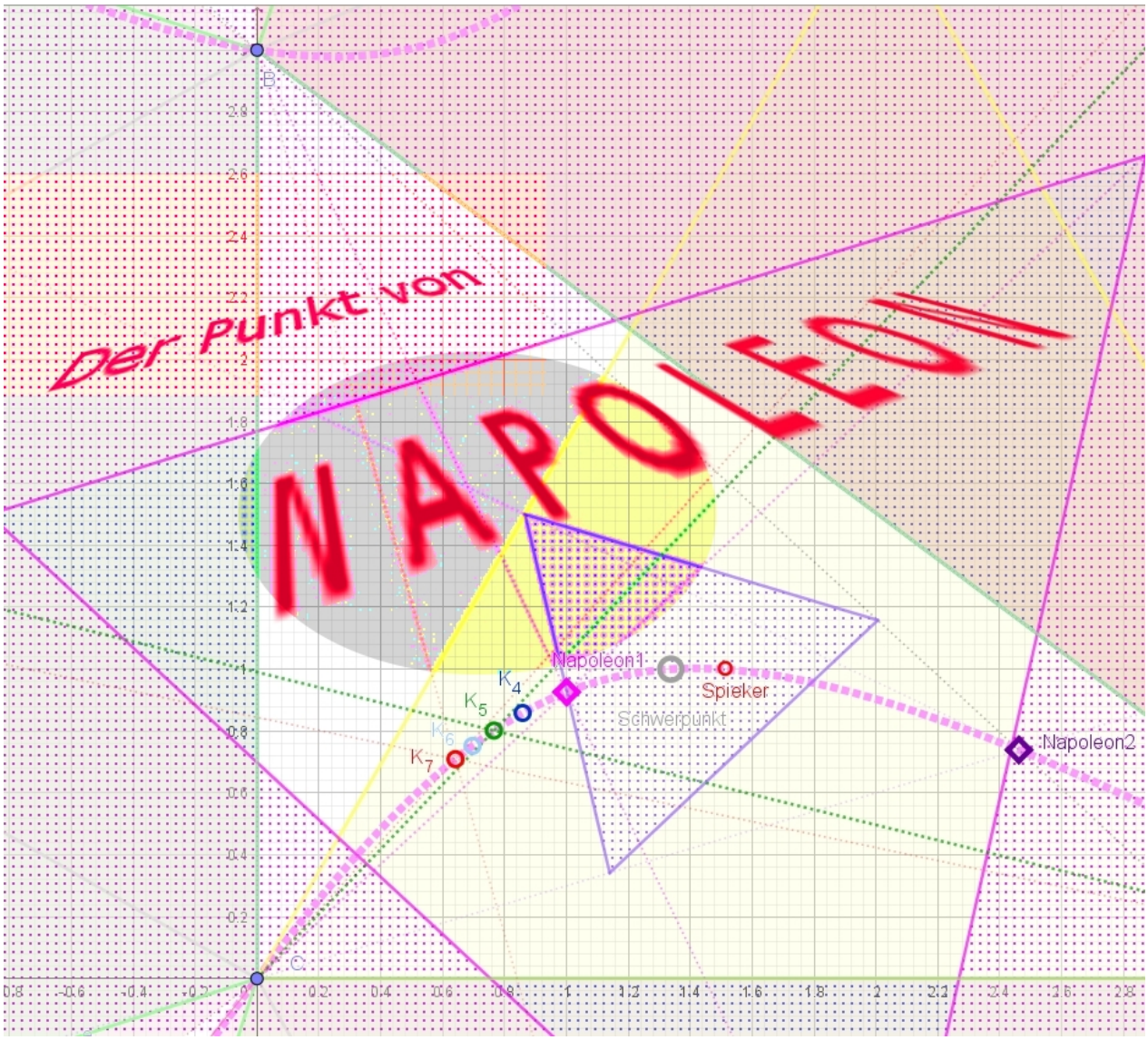
LE POINT DE NAPOLÉON

par U. R. • Traduction française



Le point de Napoléon

NAPOLEON

par U. R.

Quand je regarde par-dessus mon épaule,

qu'est-ce

que tu crois que je vois ?

Velvet Underground

Guide du traducteur : libellés des figures originales

Les figures géométriques sont reproduites à partir de l’original allemand. Les équivalents ci-dessous permettent de comprendre les annotations intégrées aux images.

LIBELLÉ ALLEMAND	TRADUCTION FRANÇAISE
Schwerpunkt	centre de gravité
Seitenmitte	milieu d’un côté
Mittelsenkrechte	médiatrice
Winkelhalbierende	bissectrice
gleichseitiges Dreieck	triangle équilatéral
rechtwinkliges Dreieck	triangle rectangle
stumpfwinkliges Dreieck	triangle obtusangle
Napoleon außen	point de Napoléon extérieur
Napoleon innen	point de Napoléon intérieur
Fläche	aire
Kiepert-Hyperbel	hyperbole de Kiepert
Spiekerpunkt	point de Spieker
Quadrat	carré
reguläres n-Eck	polygone régulier à n côtés

Les symboles, les noms de points et les valeurs numériques des figures conservent leur notation d’origine.

Imagine que « Geometria » soit une femme qui affirme à son propre sujet :

« Je suis faite de mathématiques ! »

Plus précisément, je suis née de l'algèbre et de l'arithmétique !

Je suis la voie parfaitement droite qui ne se termine jamais : je vis éternellement !

Est-ce que je te fascine ? Et si oui, m'aimes-tu, ou préférerais-tu n'avoir absolument rien à faire avec moi ?

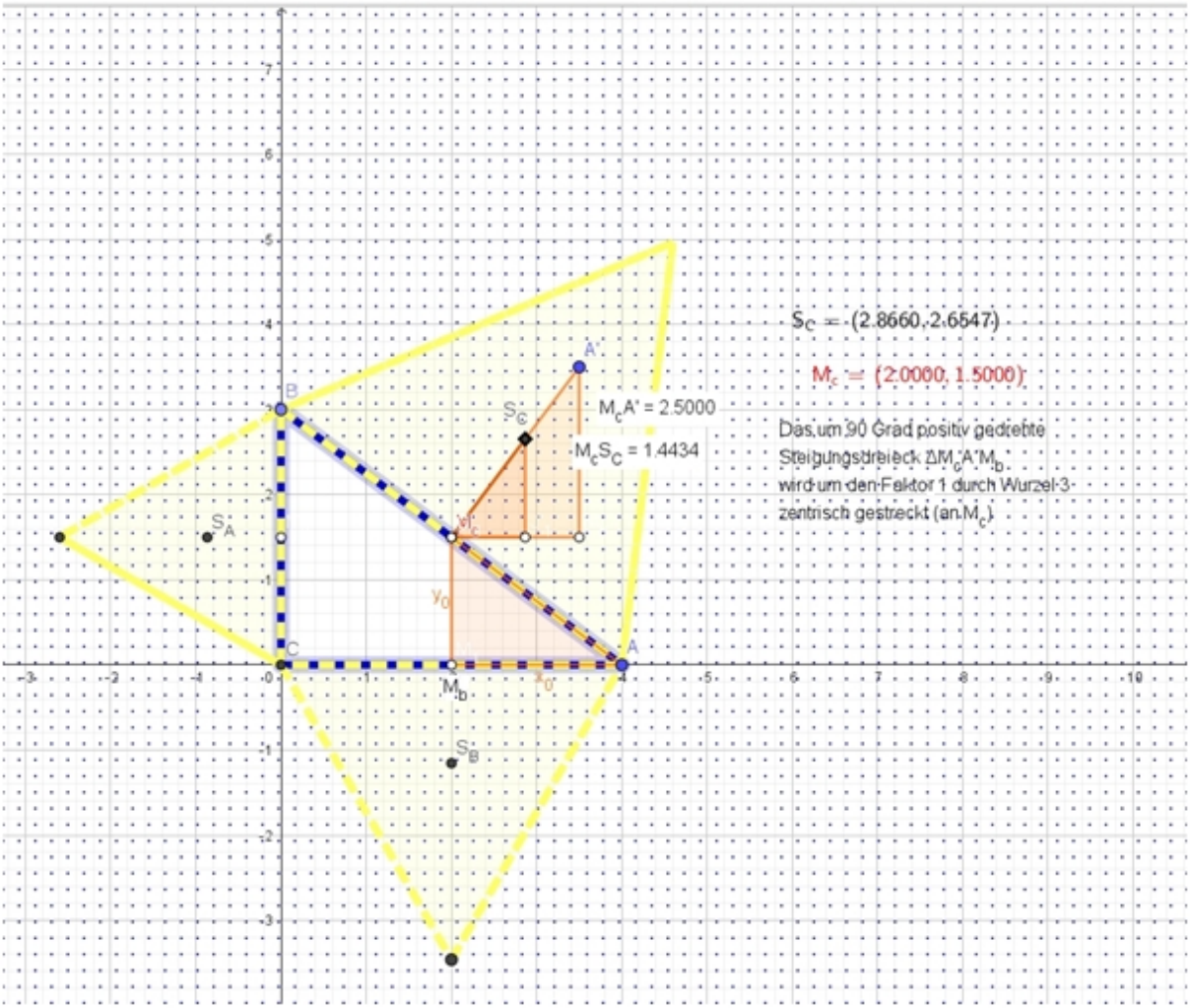
Et si tu voulais maintenant me poser une question, quelle serait-elle ?

Ou puis-je, à l'inverse, te poser une question :

Quand je regarde par-dessus mon épaule, à ton avis, qu'est-ce que je vois ?

Eh bien, c'est étrange, c'est très, très, très étrange !

Comme nous allons le voir, Napoléon Bonaparte était lui aussi fasciné par elle !

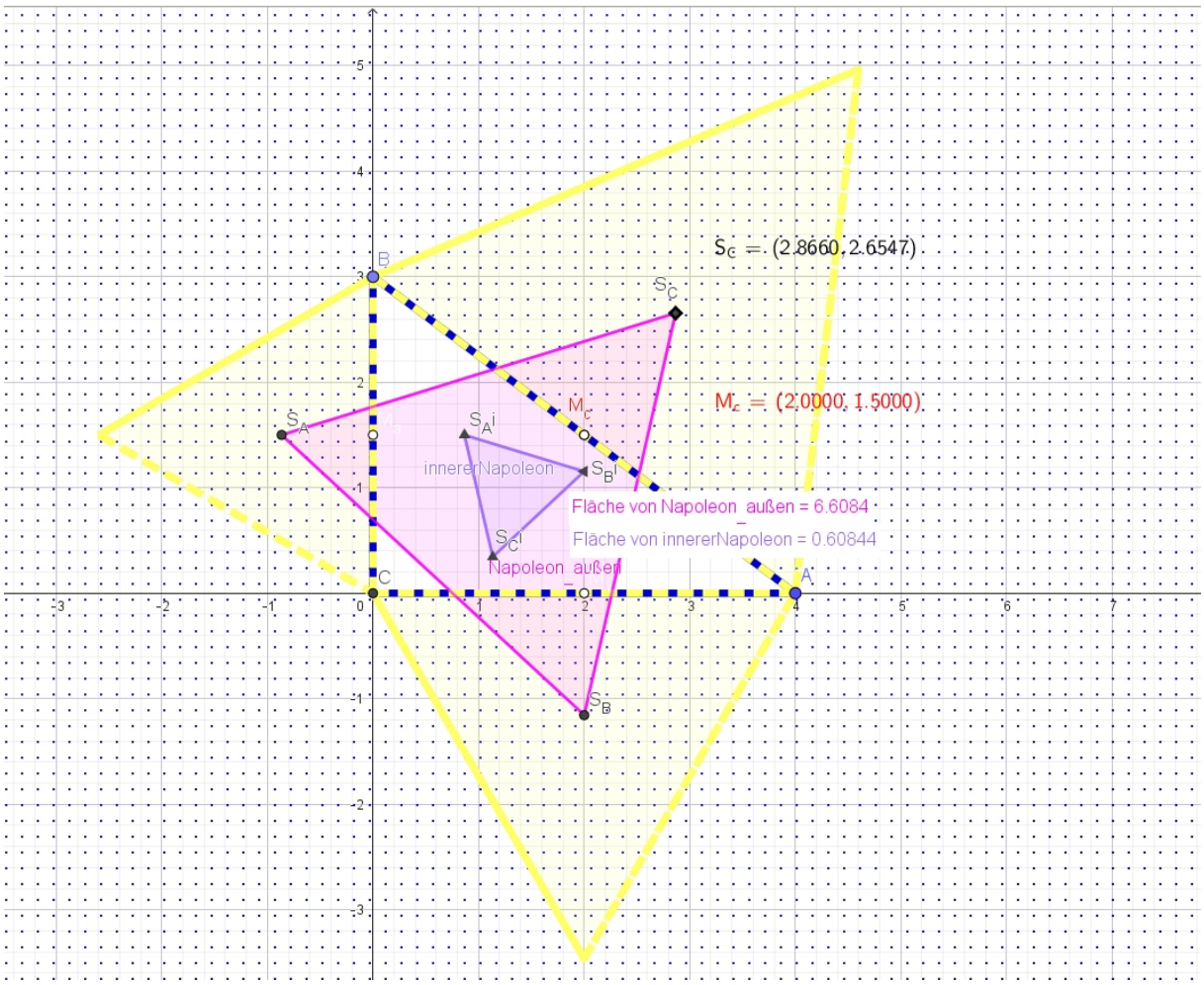


Pour déterminer le centre de gravité d'un carré construit sur l'un des trois côtés d'un triangle, il suffit de partir du milieu de ce côté et de se déplacer perpendiculairement d'une distance égale à la moitié de sa longueur. Pour un triangle équilatéral construit sur un côté, le centre de gravité se trouve seulement au tiers de sa hauteur $h = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a$, mesurée depuis la base ; il faut donc diviser la demi-longueur $\frac{1}{2}a$ par $\sqrt{3}$.

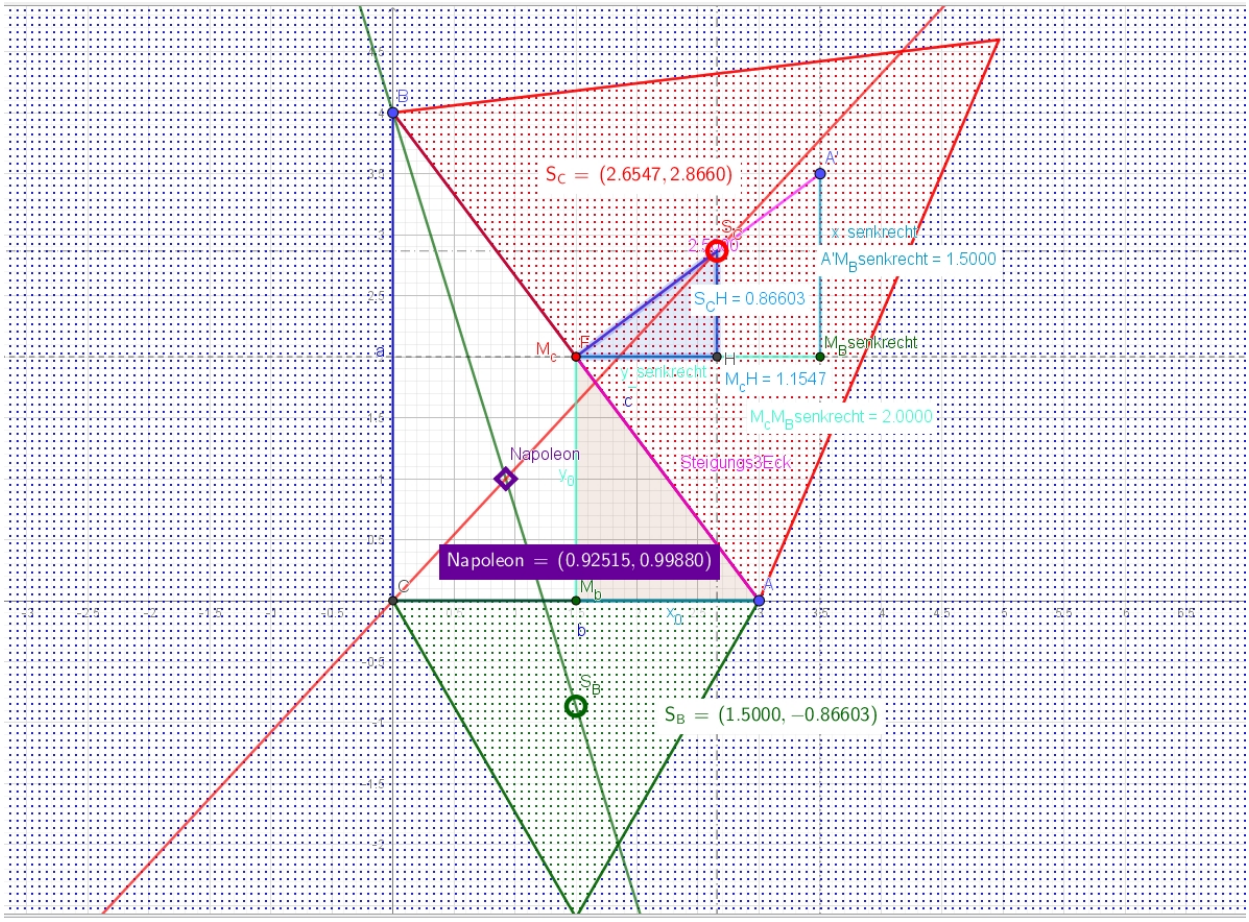
Il existe un théorème central de la géométrie euclidienne à l'aide duquel on peut démontrer tous les autres : **le théorème de Pythagore.** Toute la géométrie euclidienne repose sur lui.

De même que l'on construit des carrés sur les côtés d'un triangle rectangle dans la figure illustrant ce théorème, on peut construire à leur place des triangles réguliers (équilatéraux), comme le demande le théorème de Napoléon.

Napoléon relia alors leurs trois centres (centres de gravité) et obtint à nouveau un triangle équilatéral, quelle que soit la forme du triangle initial ΔABC !

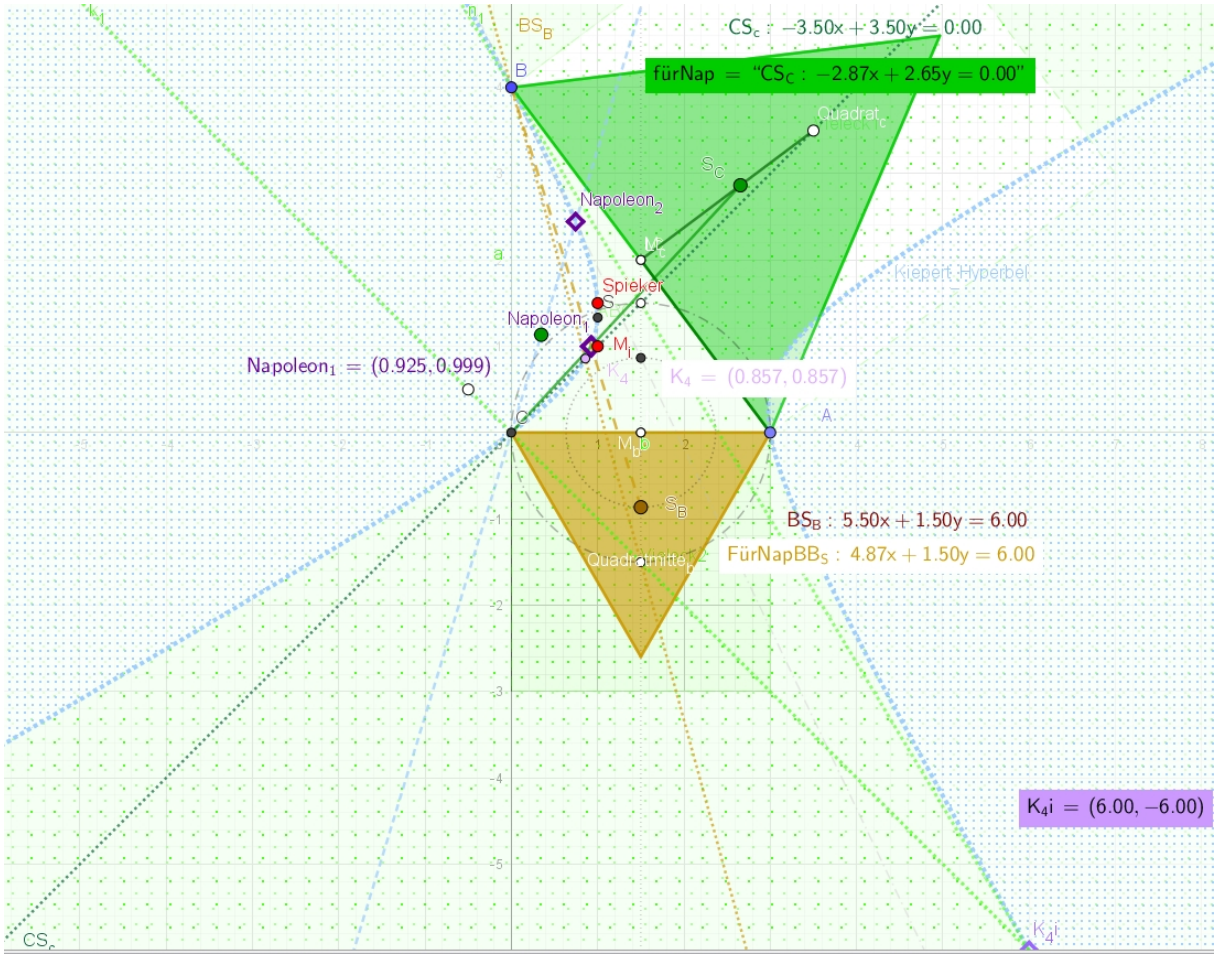


Les droites joignant les centres de gravité S_A, S_B et S_C aux sommets opposés A, B et C se rencontrent en un même point. Lorsque les triangles équilatéraux sont construits vers l'extérieur (ou vers l'intérieur), il s'agit du point de Napoléon (ou du deuxième point de Napoléon).



Sur M_CS_C, médiatrice de l'hypoténuse c, ainsi que sur M_bS_B, médiatrice du côté b, se trouvent les centres de gravité de tous les polygones réguliers à n côtés construits sur les côtés correspondants.

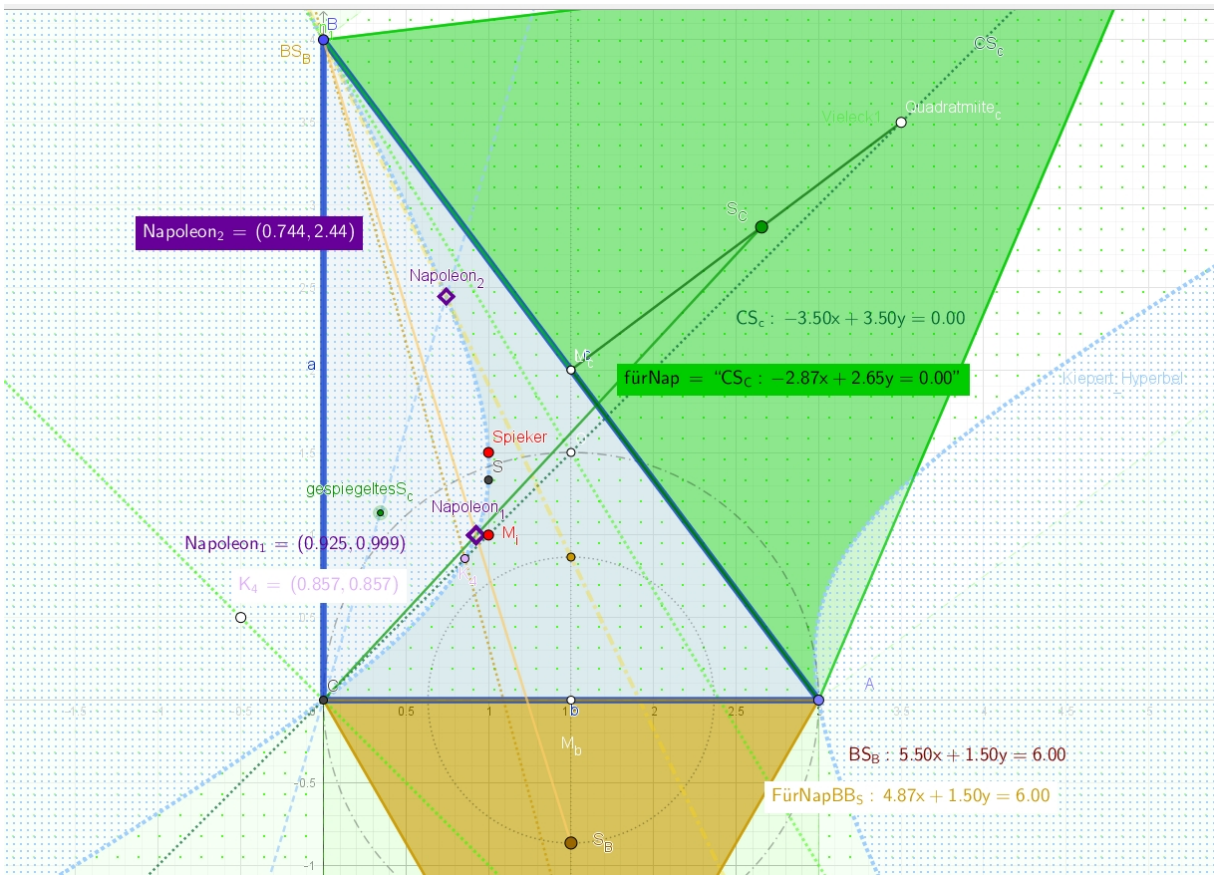
Calcul du point de Napoléon pour les triangles rectangles



Commençons par construire à nouveau les carrés (c'est-à-dire λ = 1). Pourquoi les valeurs de x et de y sont-elles égales ? Parce que les deux points K₄ se trouvent sur les bissectrices, aux coordonnées (0,875; 0,875) et (6; −6) !

Plaçons l'angle droit à l'origine, au point C, et les points A et B sur les axes.

> A = (a; 0) B = (0; b) C = (0; 0) a = 3; b = 4; c = 5



Le centre de gravité du polygone régulier à n côtés construit sur le côté b appartient à la médiatrice de b. On obtient S_B en partant du milieu $M_B = (½a; 0)$ et en reportant vers le bas, dans la direction négative de l'axe y, la moitié de la longueur du côté, multipliée par le facteur λ. Pour λ = 1, on obtient le centre de gravité du carré construit sur ce côté ; pour λ = 1/√3, celui du triangle équilatéral construit sur le côté, utilisé pour construire le point de Napoléon.

> $S_B = M_B − λ\ (0; ½a) = (½a; −½λa)$

Sur la figure, $S_B = (1,5; −0,8660…)$.

Pour la droite BS_B, utilisons la forme à deux points :

> $(y - y_0)/(x - x_0) = (y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$ $(= m)$

avec $B = (x_0; y_0) = (0; b)$ et $S_B = (x_1; y_1) = (½a; -½\lambda a)$.

$(y - b)/(x - 0) = (-½\lambda a - b)/(½a - 0) = -(½\lambda a + b)/(½a)$

$y - b = -(\lambda a + 2b\ /a)x$

> $y = -(\lambda a + 2b\ /a)x + b$

Sur la figure, pour $a = 3$ et $b = 4$:

$4{,}87x + 1{,}5y = 6$

$y = -(1/\sqrt{3} + 8/3)x + 4$

$y = -3{,}2440\ldots x + 4$ OK

On obtient le centre de gravité S_C en reportant, à partir du milieu du côté c, λ fois le « triangle de pente tourné de 90° ».

> $S_C = M_C + \lambda(½b; ½a) = (½a + \lambda ½b; ½b + \lambda ½a)$

CS_C est une droite passant par l'origine, $y = mx$, avec $m = y_{S_C} / x_{S_C}$; donc :

$y = x\ (½b + \lambda ½a) / (½a + \lambda ½b)$

L'intersection de la droite rouge CS_C et de la droite verte BS_B est le point de Napoléon.

> $y = -(\lambda a + 2b/a)x + b$ et $y = [(b + \lambda a)/(a + \lambda b)]\, x$

Égalons les deux expressions afin de calculer l'abscisse x :

$(\lambda a + 2b/a)x + [(b + \lambda a)/(a + \lambda b)]x = b$

$[(\lambda a + 2b/a) + (b + \lambda a)/(a + \lambda b)]x = b$

$x[(\lambda a + 2b/a)(a + \lambda b) + (b + \lambda a))] / (a + \lambda b) = b$

> $x = b(a + \lambda b) / [(\lambda a + 2b/a)(a + \lambda b) + (b + \lambda a)]$

Lorsque λ tend vers zéro, on obtient le centre de gravité S :

$x = a\, b / [(2b + (b)] = a/3 = 1$ (pour $a = 3$)

$x = \{ a-1 \}/2 = 1$

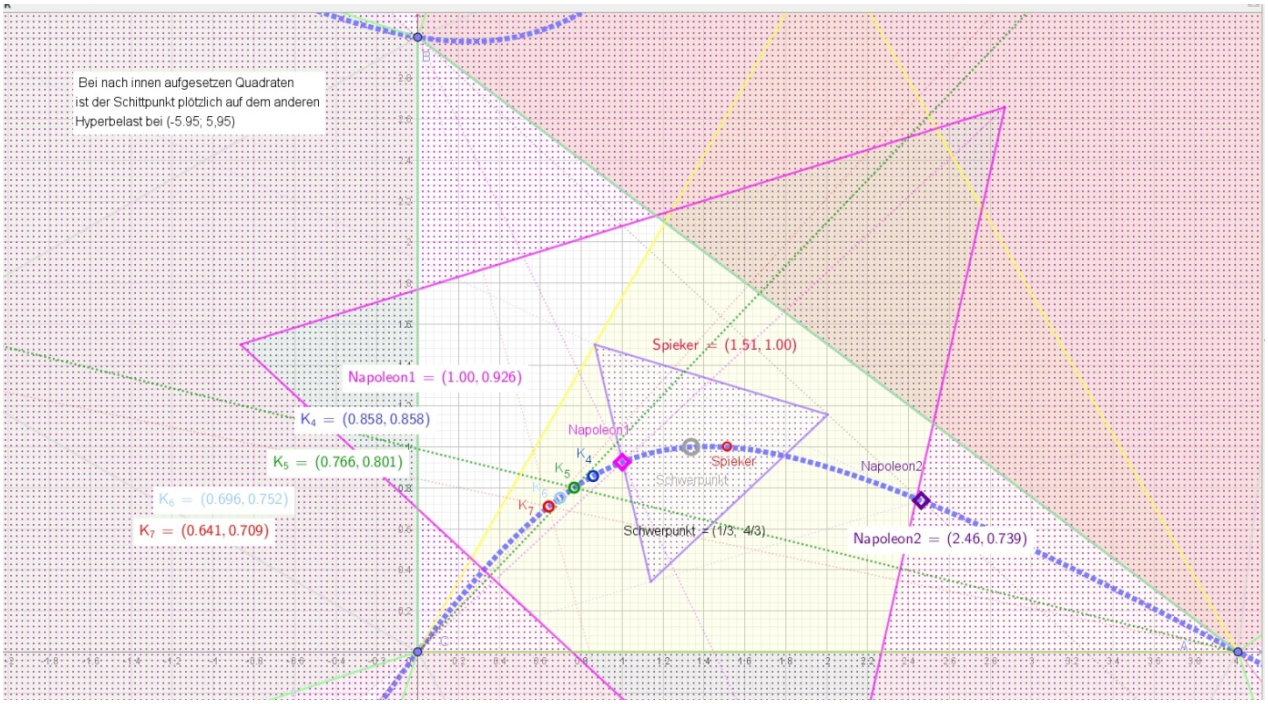
puis, en remplaçant dans

$y = -(\lambda + 2b/a)x + b$

$y = -2b/a + b = 4 - 8/3 = 4/3$

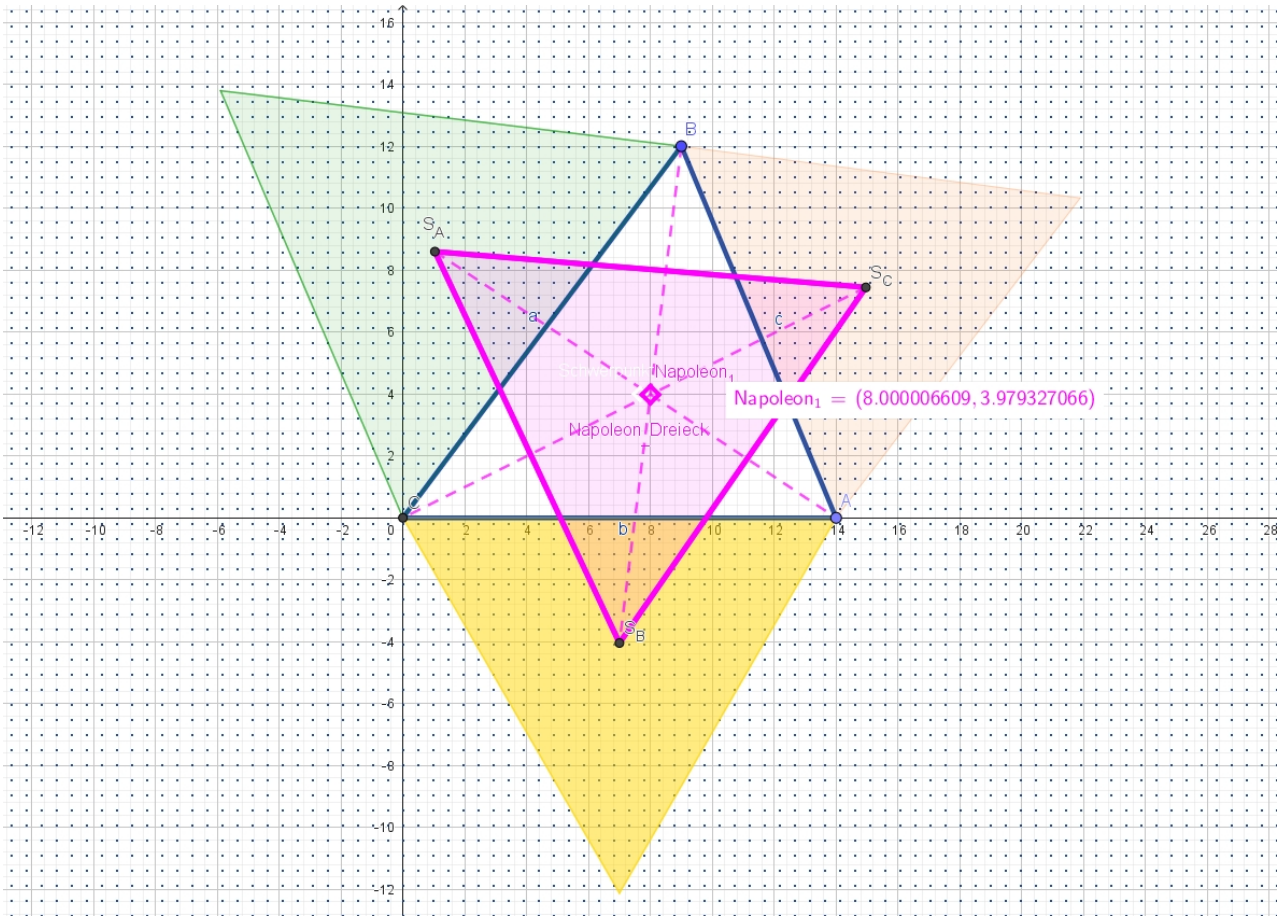
S = 1/3 (A + B + C) = 1/3 (3; 4) = (1; 1,3333…) Kanton Clarus

[1] On obtient plus rapidement ce résultat à partir de $y = x\,(b + \lambda a)/(a + \lambda b) = b/a = 4/3$ pour $x = 1$.

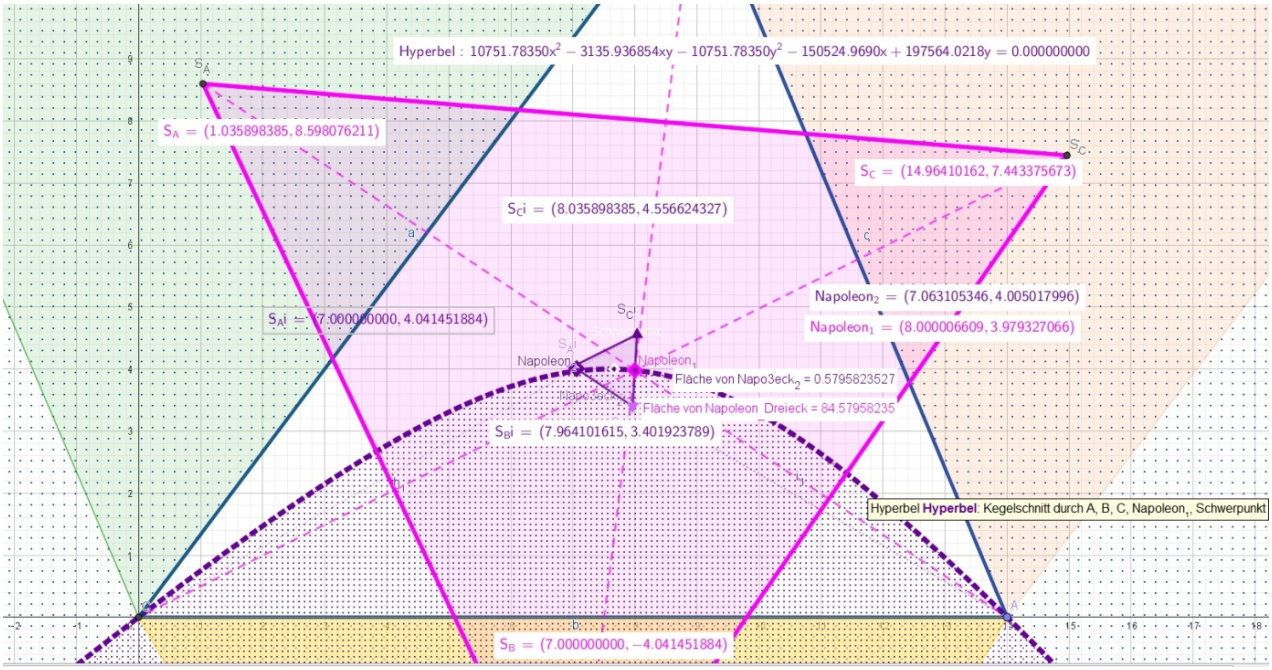


Les points d'intersection, depuis le point de Napoléon (≡ K_3) jusqu'à K_7 pour les heptagones réguliers construits sur les côtés, appartiennent à l'hyperbole de Kiepert passant par A, B, C, S et le point de Spieker. Ce dernier est l'image du centre du cercle inscrit M_i par une homothétie de centre S et de rapport $k = -½$.

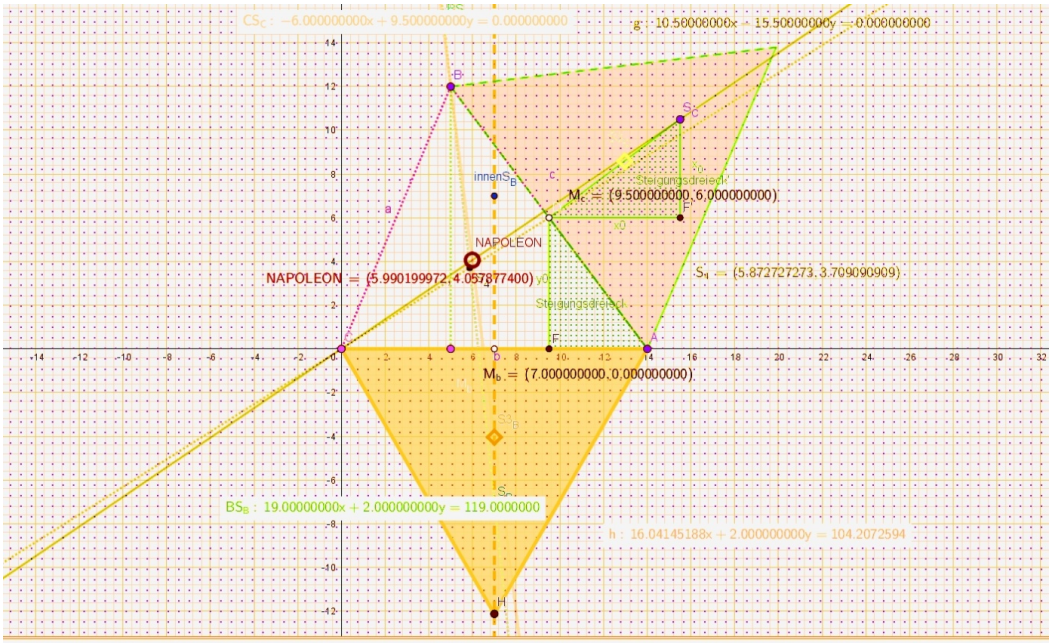
Le point de Napoléon pour les triangles non rectangles



Le deuxième triangle classique, de côtés 13, 14 et 15.



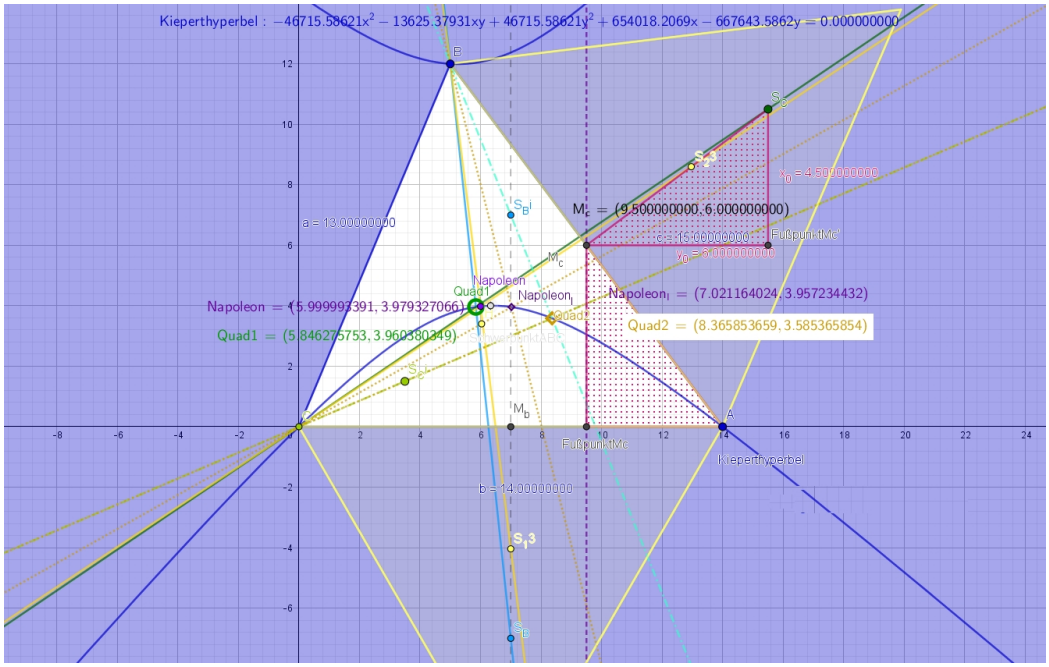
Les deux triangles de Napoléon ont le même centre de gravité que le triangle initial ABC. L'aire du triangle de Napoléon formé par les centres de gravité des triangles équilatéraux construits à l'extérieur dépasse toujours celle du deuxième triangle de Napoléon, obtenu avec les triangles construits à l'intérieur, d'une quantité égale à l'aire du triangle ABC. Les deux points de Napoléon se trouvent sur l'hyperbole de Kiepert et sont séparés par le centre de gravité S (en blanc).



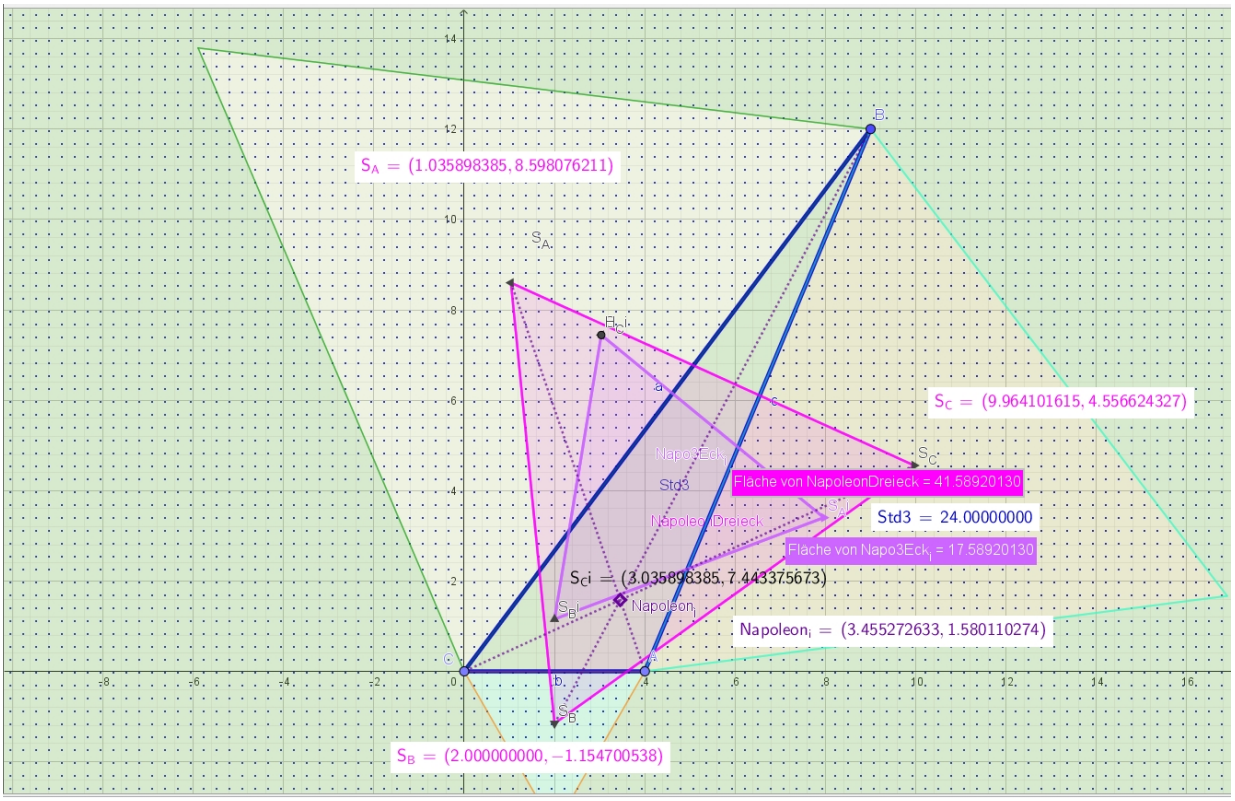
Au lieu de tracer les triangles réguliers (ou les carrés jaunes), il suffit d'utiliser deux de leurs centres de gravité, S_B et S_C.

Le milieu du côté b est $M_b = (½a; 0)$, et le milieu du côté c est :

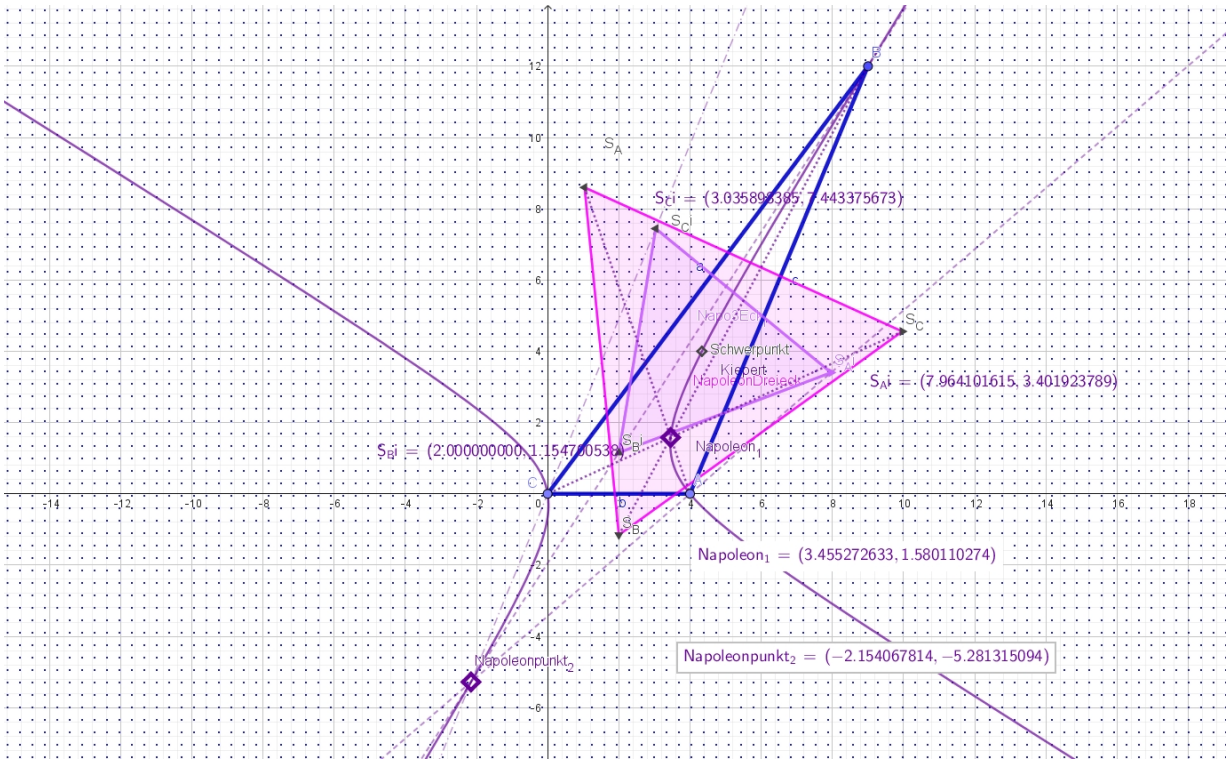
$M_c = ½(a + b_x; b_y) = (½a + ½b_x; ½b_y)$, $2M_c = (a + b_x; b_y)$



Triangles obtusangles



Le troisième triangle classique.


$S_{Ci} = (3.035894385, 7.443375673)$
$S_{Ai} = (7.964101615, 3.401923789)$
$S_{Bi} = (2.000000000, 1.154700538)$
$Napoleon_1 = (3.455272633, 1.580110274)$
$Napoleonpunkt_2 = (-2.154067814, -5.281315094)$
Schwerpunkt
Kiepert
NapoleonDreieck
Napoleon1
Napoleonpunkt2