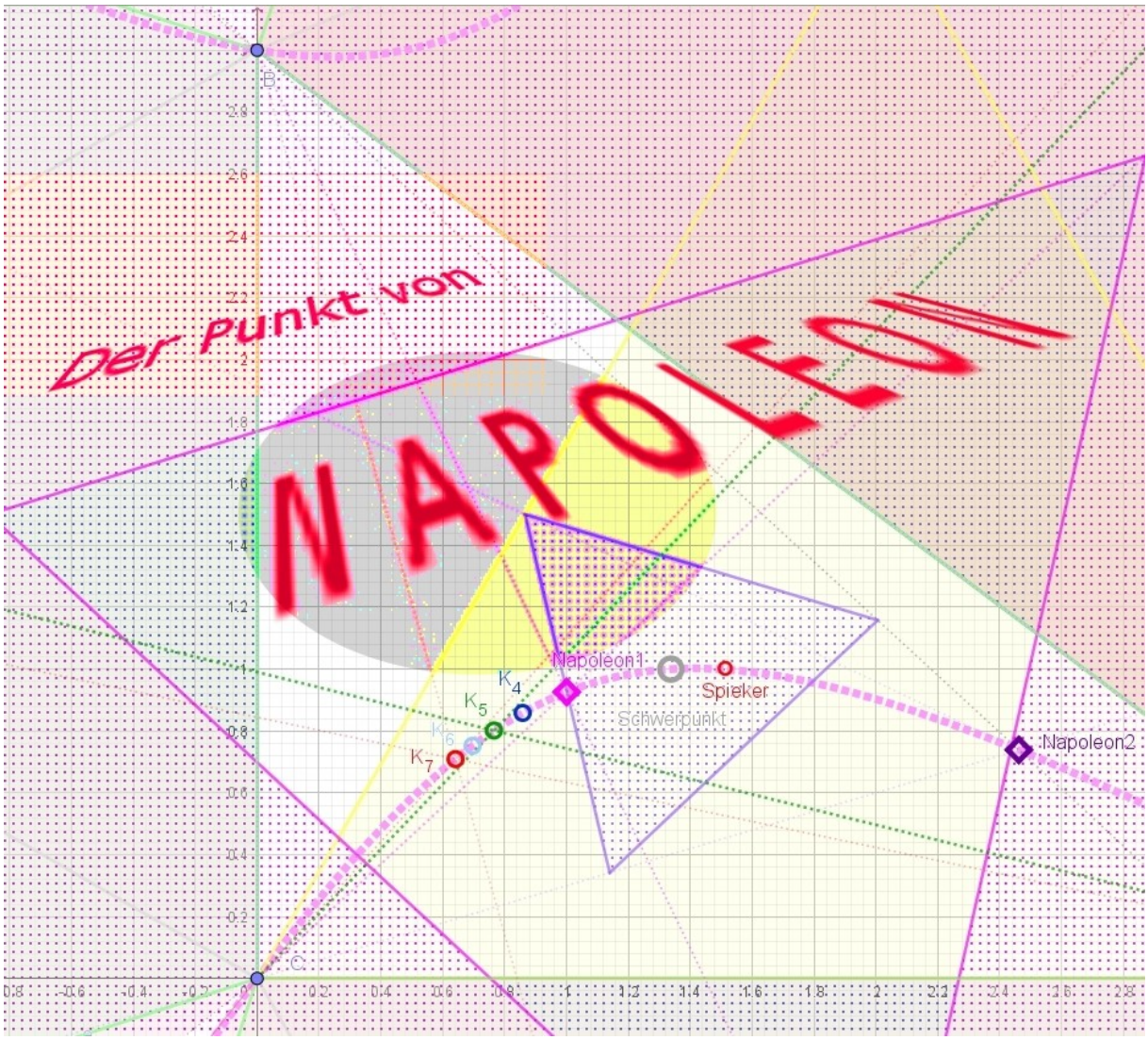

Der Punkt von
NAPOLEON
B
C
Napoleon1
Spieker
Schwerpunkt
Napoleon2
K4
K5
K6
K7

# Der Punkt von NAPOLEON

von U. R.

**When I ´m looking over my shoulder,**

**what**

**do U think I see?**

Velvet Underground

**Stell dir vor**, die >> **Geometria** << wäre eine Frau, die von sich selbst behauptet:

**>> Ich bin aus Mathematik gemacht ! <<**

***Genauer gesagt, ich entstand aus der Algebra und Arithmetik!***

***Nun, ich bin der kerzen-gerade Weg, der niemals endet: Ich lebe ewig!***

Fasziniere ich dich? Und wenn ja, liebst du mich oder möchtest du mit mir in keiner Art und Weise etwas zu tun haben?

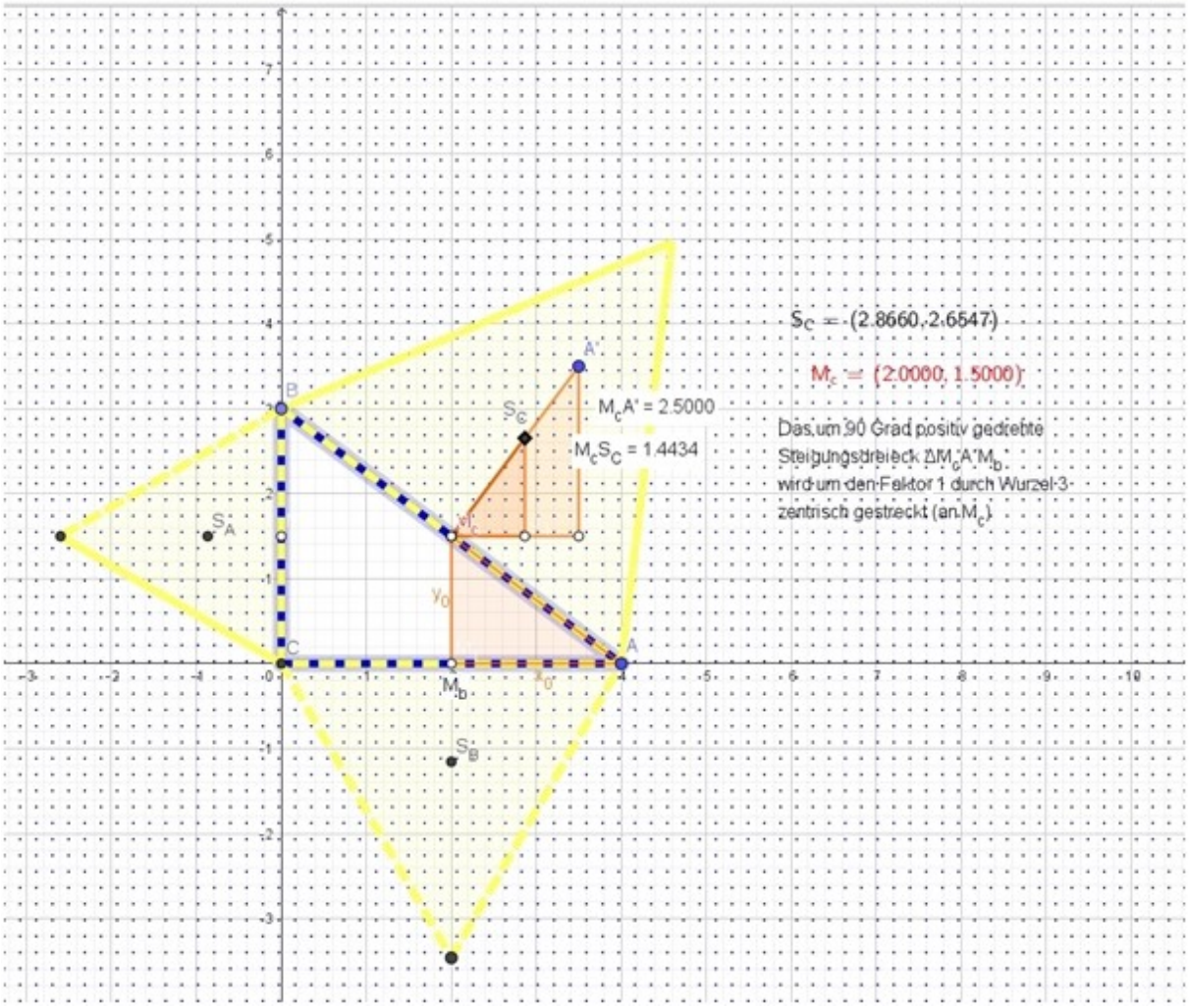
Und wenn du nun mir eine Frage stellen wolltest, welche Frage wäre das?

Oder darf ich umgekehrt dir eine Frage stellen:

Wenn ich über meine Schultern schaue, was meinst du, was es ist, das ich sehe?

Nun es ist seltsam, es ist sehr sehr, sehr seltsam!

Wie wir gleich noch sehen, war auch Napoleon Bonaparte von ihr fasziniert!



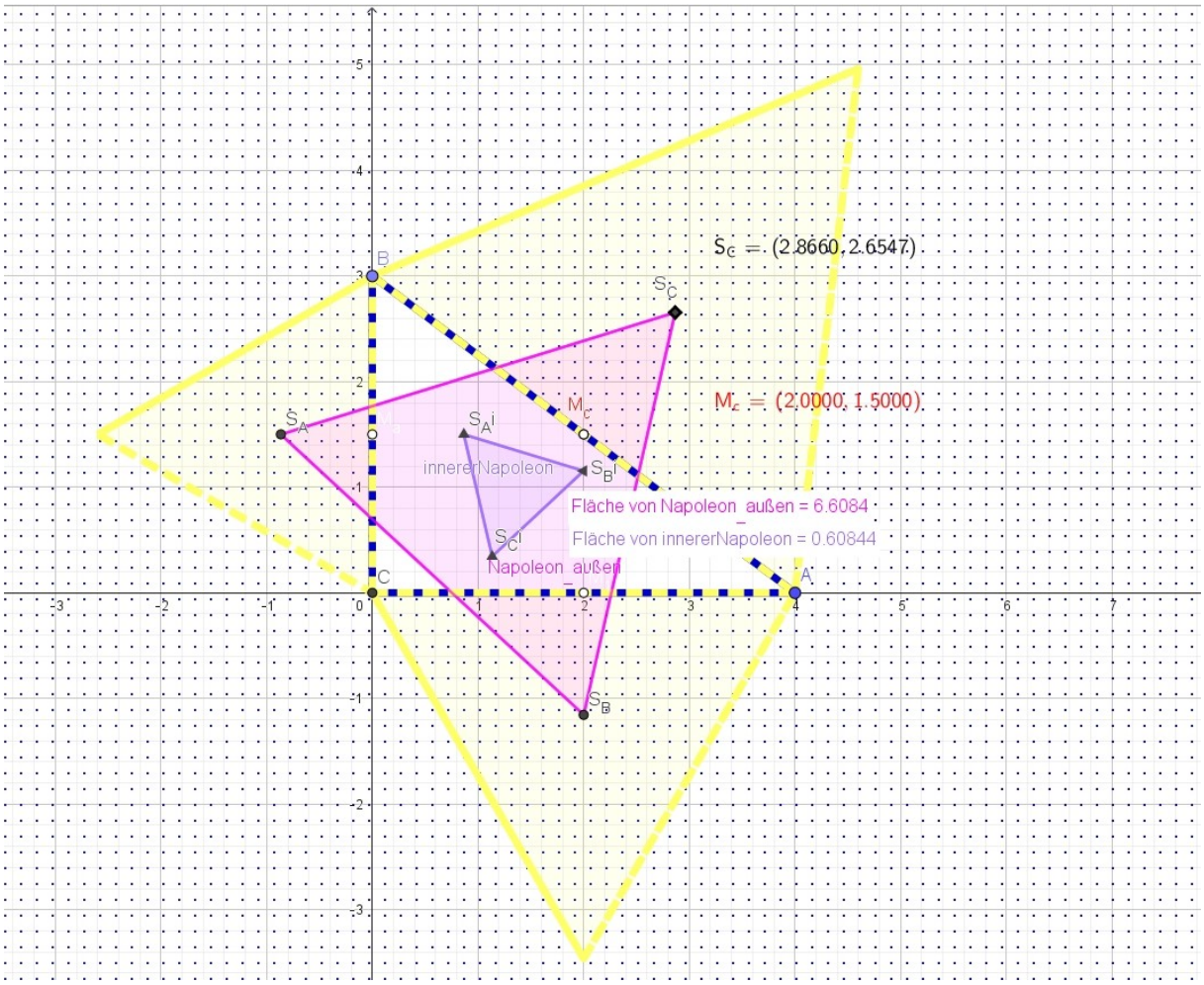

Damit man zum Schwerpunkt der auf den drei Dreiecksseiten aufgesetzten Quadrate gelangt, genügt es senkrecht auf der Seitenmitte die halbe Seitenlänge hinzu zu fügen!
Bei aufgesetzten gleichseitigen Dreiecken liegt der Schwerpunkt nur bei einem Drittel der Dreieckshöhe von $h=\frac{1}{2}\sqrt{3}\,a$, also muß man die halbe Seitenlänge $\frac{1}{2}a$ durch $\sqrt{3}$ teilen

Es gibt einen zentralen Satz der Euklidischen Geometrie, mit dessen Hilfe man jeden anderen beweisen kann: Der ***Satz des Pythagoras***. Mit ihm steht und fällt die gesamte Euklidische Geometrie.

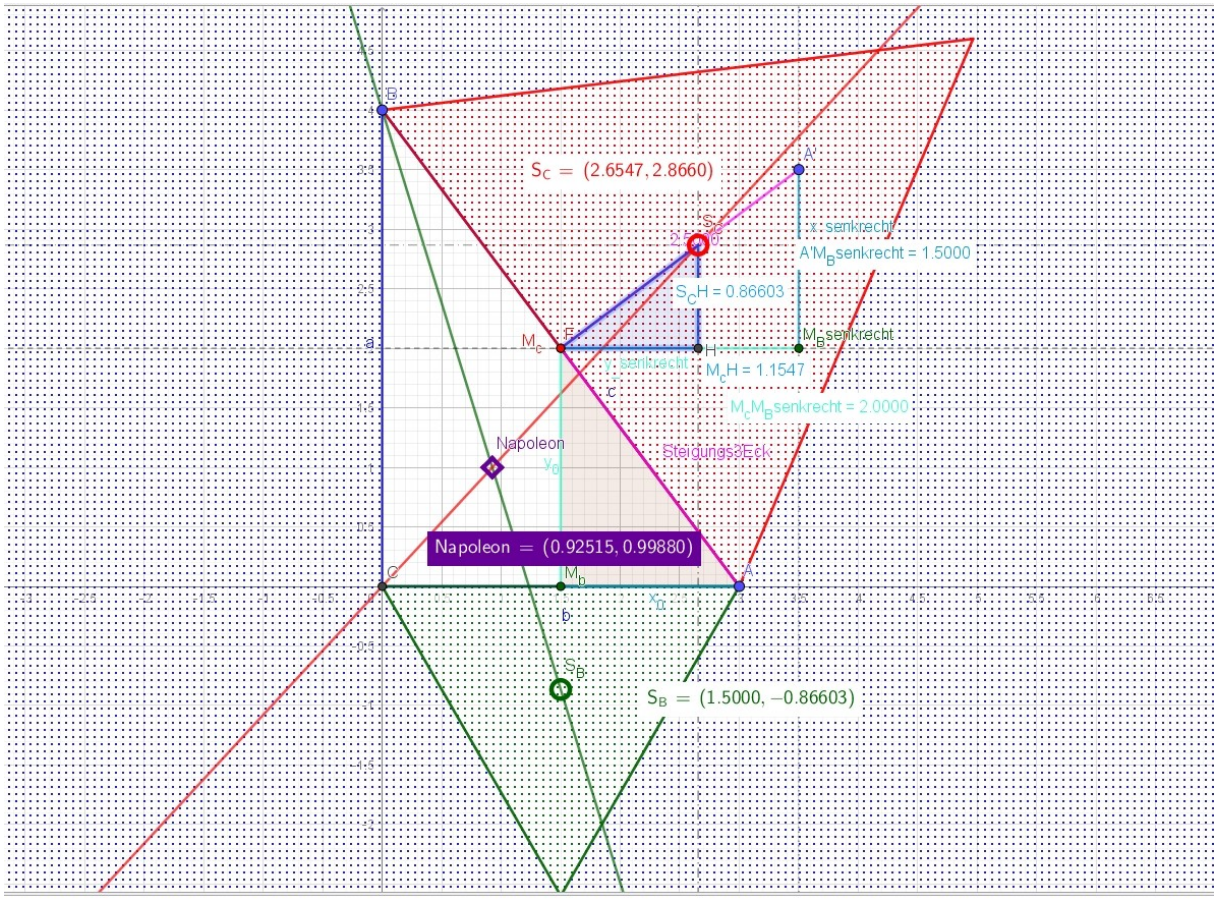
Ähnlich wie man bei der Figur zu diesem Satz dem rechtwinkligen Dreieck auf den Seiten Quadrate aufsetzt, kann man stattdessen

auch reguläre Dreiecke aufsetzen, wie es der Satz des Napoleon verlangt.

Napoleon verband nun deren drei Zentren (Schwerpunkte) und fand wiederum ein regelmäßiges gleichseitiges Dreieck, ganz egal wie das Ausgangsdreieck ΔABC auch sein mochte!

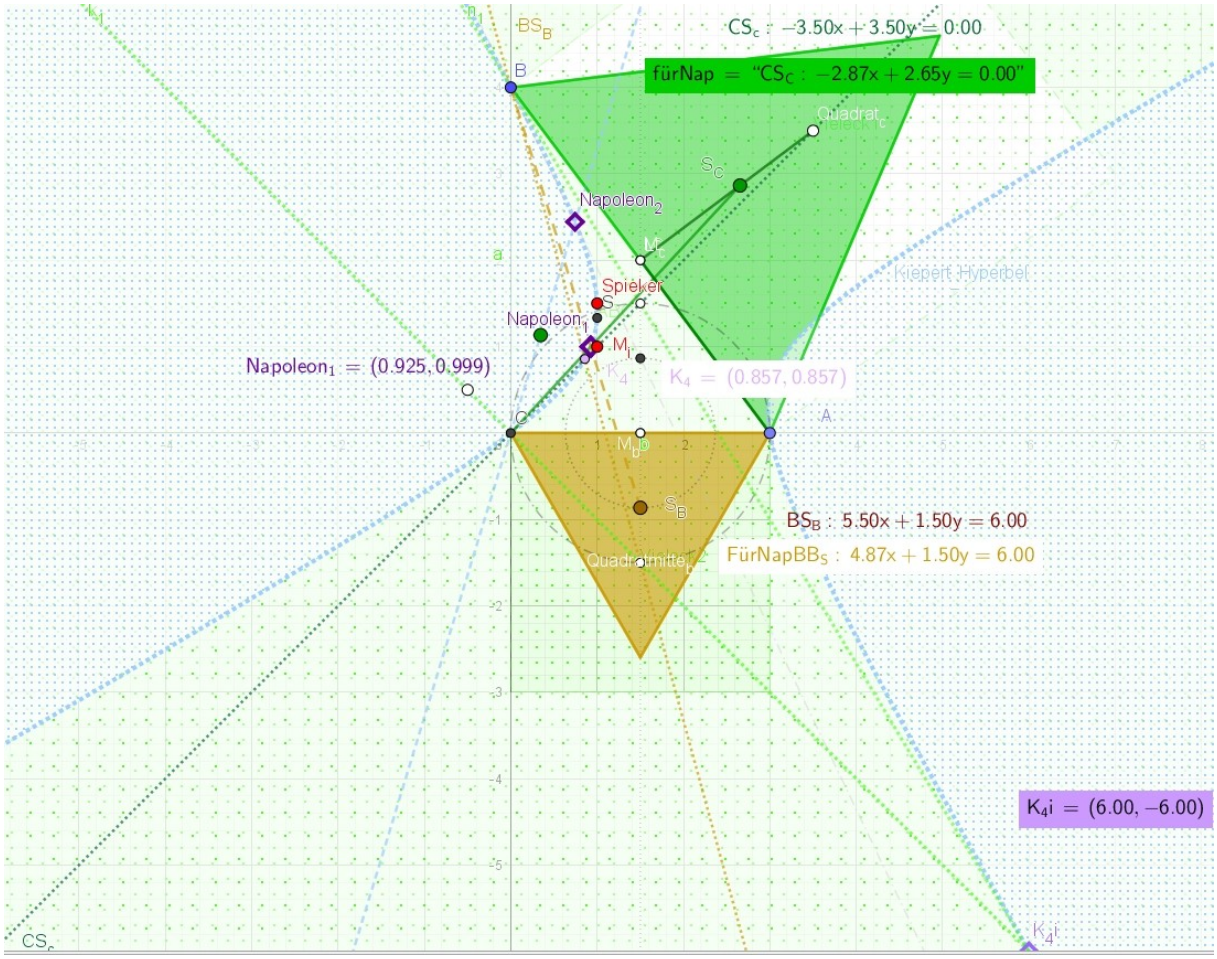



Die Verbindungen der Schwerpunkte $S_A$, $S_B$ und $S_C$ mit den jeweiligen Gegenecken A. B und C des Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. Im Falle der von außen (bzw. innen) aufgesetzten gleichseitigen Dreiecke ist es der Napoleonpunkt (bzw. der 2. Napoleonpunkt)!




Auf $M_CS_C$ der Mittelsenkrechten der Hypotenuse c, (sowie auf $M_bS_B$ der Mittelsenkrechten von b) liegen alle Schwerpunkte der aufgesetzten regulären n-Ecke!

# Berechnen wir nun den Napoleonpunkt für rechtwinklige Dreiecke

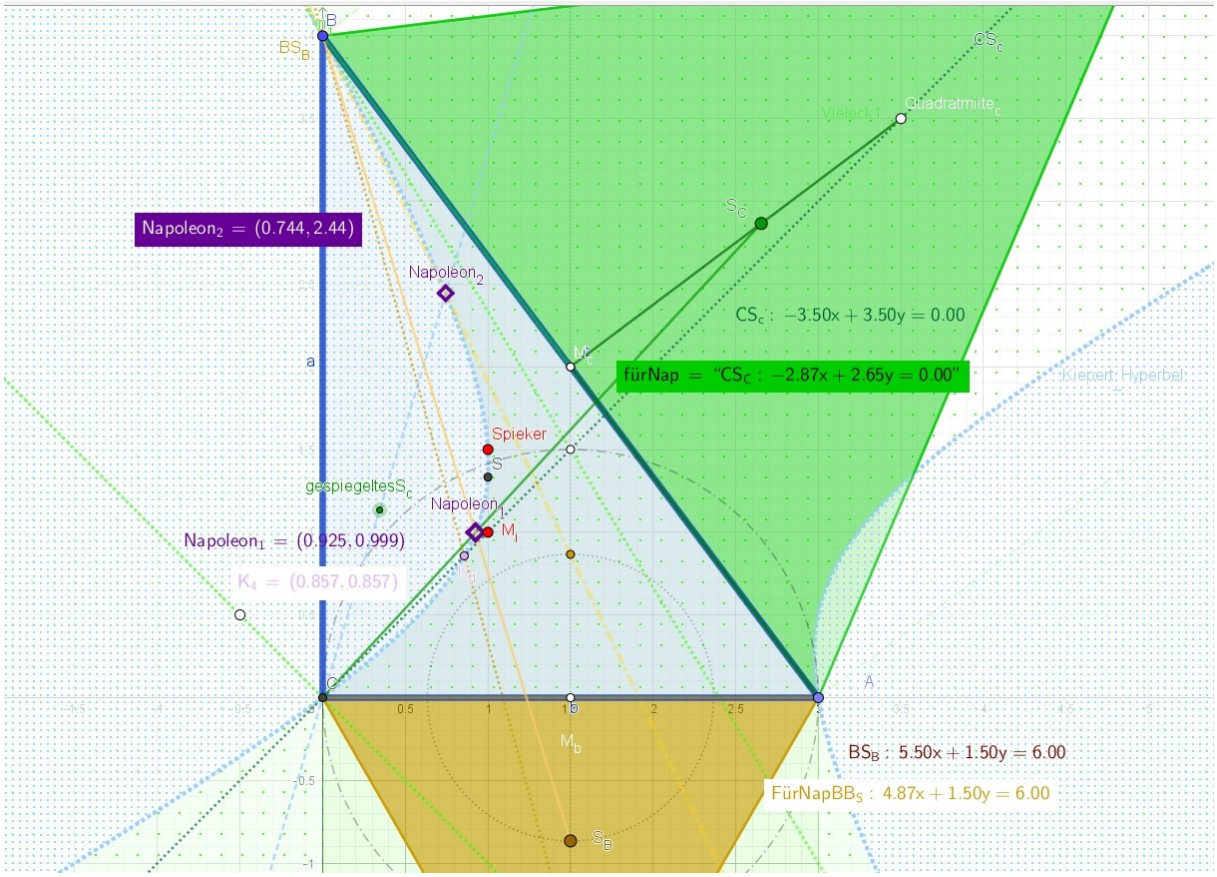



Setzen wir zunächt nochmals die Quadrate auf (d.h. λ=1)
Wieso sind die x- und y-Werte gleich?
Weil die beiden $K_4$ –Punkte auf den Winkelhalbierenei n liegen
bei (0,875; 0,875) und (6; -6) !

Der rechte Winkel liege im Ursprung bei C,

die Punkt A und B auf den Achsen

A= (a; 0)  B=(0; b)  C=(0; 0)  a=3;  b=4 und c=5




Der Schwerpunkt (des auf $M_b$ aufgesetzten regulären n-Ecks) liegt auf der Mittelsenkrechten von b. Man erhält den Schwerpunkt $S_B$, indem auf der Seitenmitte $M_B$ =(½a; 0) diese halbe Seite nach unten in die negative y-Richtung aufgesetzt wird, wobei wir noch mit dem **Faktor Lambda** den Abstand zur Seitenmitte $M_B$ multiplizieren. Für **λ=1** erhalten wir den Schwerpunkt des **aufgesetzten Quadrats**. Für λ=1/√3 erhalten wir den des aufgesetzten gleichseitigen Dreiecks für den Napoleon-Punkt. Den Schwerpunkt $\mathbf{S_B}$ **=** $M_B$- λ ( 0; ½a) = **(½a; -½λa)**

In der Abb. ist $S_B$=(1,5; -0,8660..)

Für die Gerade $BS_B$ nehmen wir die 2-Punkte-Form

$$\mathbf{(y-y_0)/(x-x_0) = (y_1-y_0)/(x_1-x_0)} \ (=m)$$

mit $B =( x_0; y_0)=( 0; b)$ und $S_B = (x_1; y_1) = \mathbf{(½a; - ½\lambda a)}$

$(y-b)/(x-0)=( \mathbf{- ½\lambda a} - b)/ \mathbf{(½a -}0) = - (\mathbf{½\lambda a} + b)/ \mathbf{(½a)}$

$$y-b =- (\lambda a + 2b /a)x$$

$$\boxed{y =- (\mathbf{\lambda a +} 2b \mathbf{/}a)\mathbf{x} + b}$$

(in der Abb. ist für a=3 und b=4
4,87x + 1,5y = 6

$$\mathbf{y = -(}1/\sqrt{3}+8/3 \mathbf{)x} +4$$

y = -3,2440..x + 4 OK)

Den Schwerpunkt $S_C$ erhält man, indem man auf die Seitenmitte von C das λ-fache des „um 90° gedrehten Steigungsdreiecks“ aufsetzt

$$\mathbf{S_C} = M_C + \lambda(½b; ½a) \mathbf{= (½a + \lambda ½b; ½b + \lambda ½a)}$$

$CS_C$ ist eine Ursprungsgerade $y = mx$ mit $m = y_{Sc} / x_{Sc}$

also $\boxed{y = x (½b + \lambda ½a) / (½a + \lambda ½b)}$

Der Schnittpunkt (der roten $CS_C$ und grünen $BS_B$ Linien) ist der Napoleonpunkt

$$y = -(\boldsymbol{\lambda a} + 2b\,/a)\mathbf{x} + b \quad \text{und} \quad y = [(b + \lambda a)/(a + \lambda b)]\,x$$

Wir setzen gleich um den x-Wert zu berechnen

$$(\boldsymbol{\lambda a} + 2b\,/a)\,\mathbf{x} + (b + \lambda a)/(a + \lambda b)\,\mathbf{x} = b$$

$$[(\boldsymbol{\lambda a} + 2b\,/a) + (b + \lambda a)/(a + \lambda b)]x = b$$

$$x[(\boldsymbol{\lambda a} + 2b\,/a)(a + \lambda b) + (b + \lambda a)]/(a + \lambda b) = b$$

$$\mathbf{x} = b(a + \lambda b)/[(\boldsymbol{\lambda a} + 2b\,/a)(a + \lambda b) + (b + \lambda a)]$$

Für verschwindendes Lambda erhalten wir den Schwerpunkt S

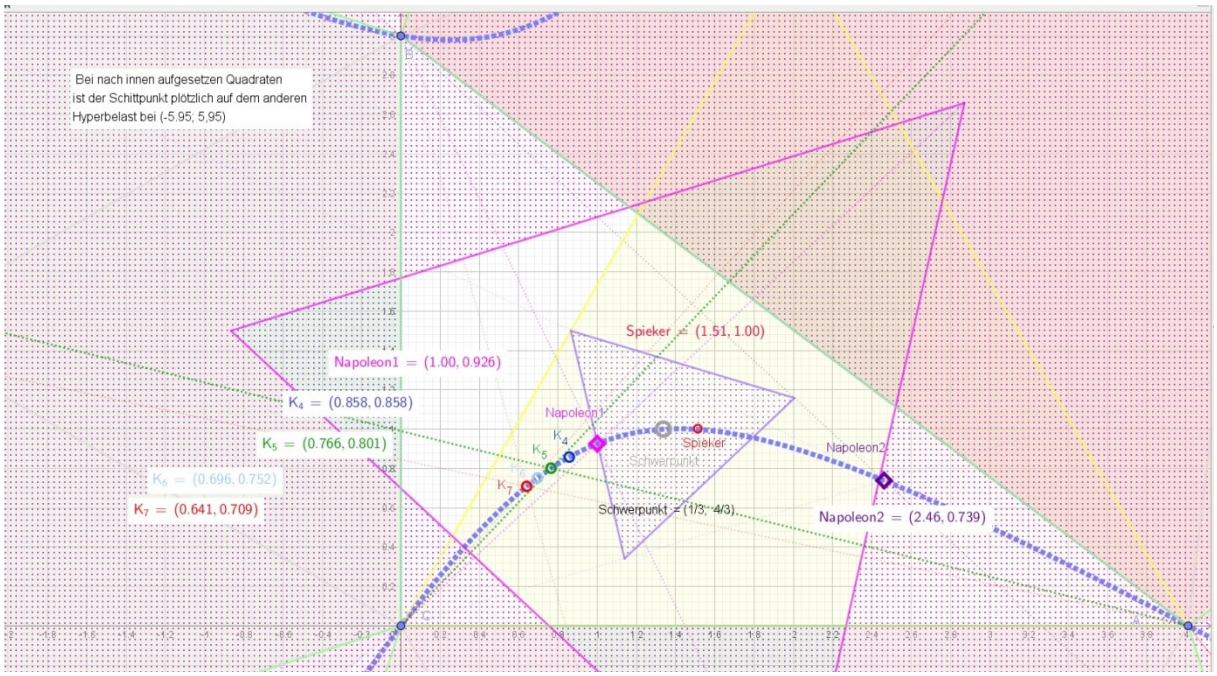
$\mathbf{x} = a\,b/[(2b + (b)] = a/3 = 1$ für $a=3$

$x = \{a-1\}/2 = 1$ und das eingesetzt in $y = -(\boldsymbol{\lambda} + 2b\,/a)\mathbf{x} + b$

$$y = -2b\,/a + b = 4 - 8/3 = 4/3$$[1]

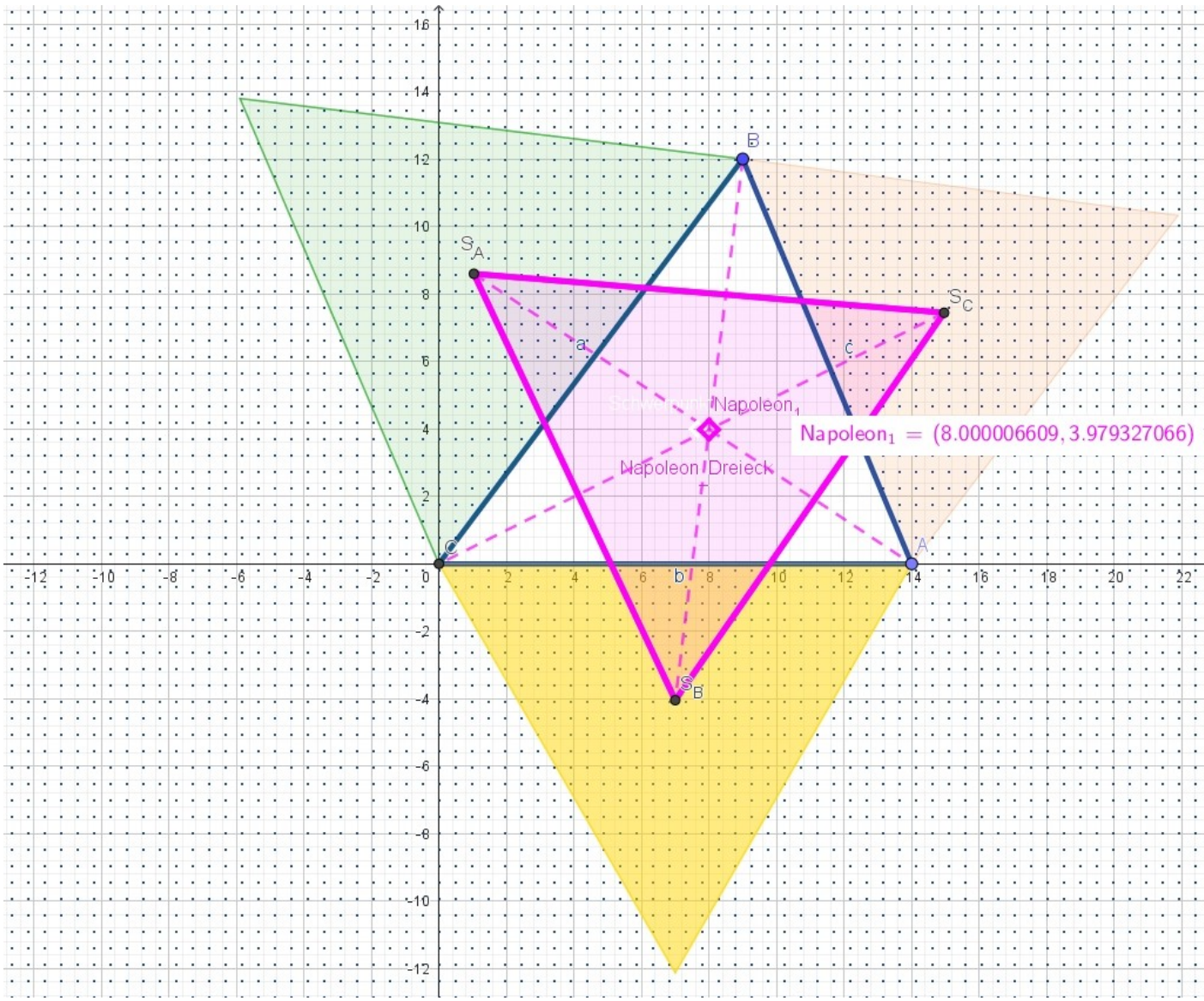
S = 1/3 (A+B+C) = 1/3 (3; 4) = (1; 1,3333..) Kanton Clarus

[1] was schneller noch aus $y = x(b + \lambda a)/(a + \lambda b) = b/a = 4/3$ für $x=1$ hervor geht

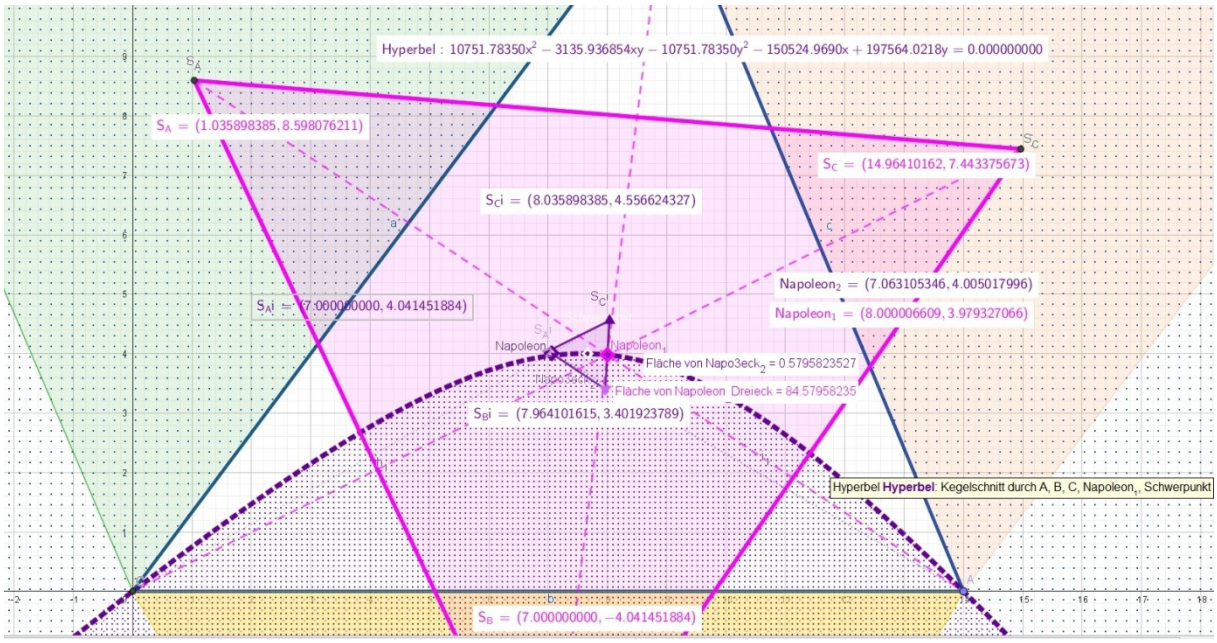



Die Schnittpunkte von Napoleon ($\equiv K_3$) bis zu $K_7$ bei aufgesetzten regulären Sieben-Ecken liegen auf der Kiepert-Hyperbel durch A, B, C, S und Spiekerpunkt (der an S mit k=-½ zentrisch-gestreckt Inkreismittelpunkt $M_i$)

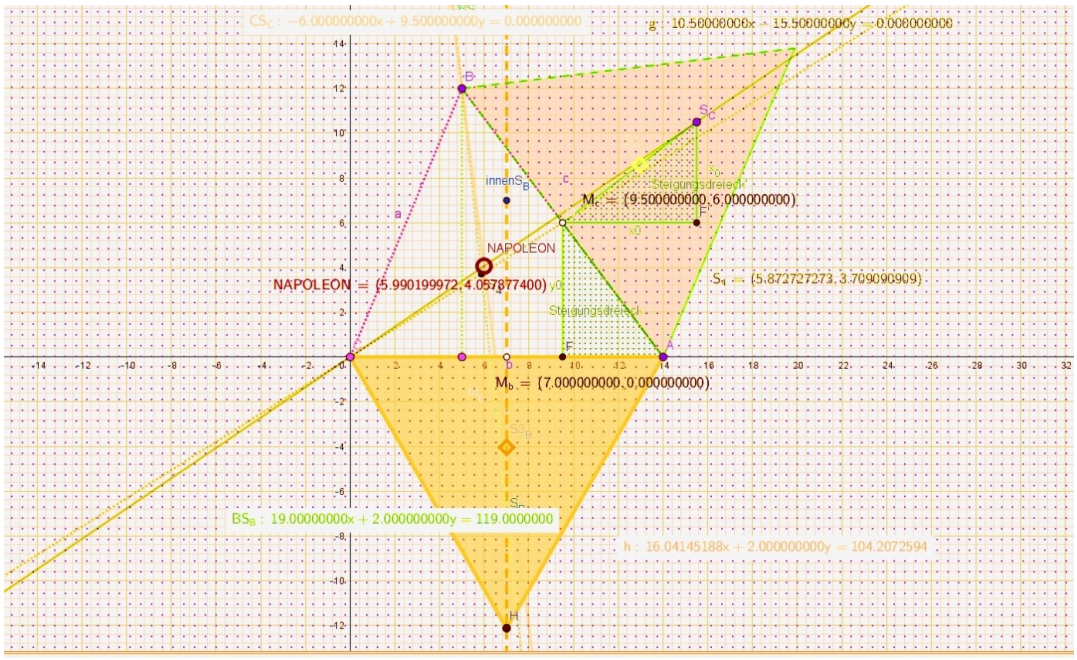
# Napoleon bei Nichtrechtwinkligen Dreiecken




*Das 2. Standard-Dreieck mit den Seitenlängen 13, 14 und 15*



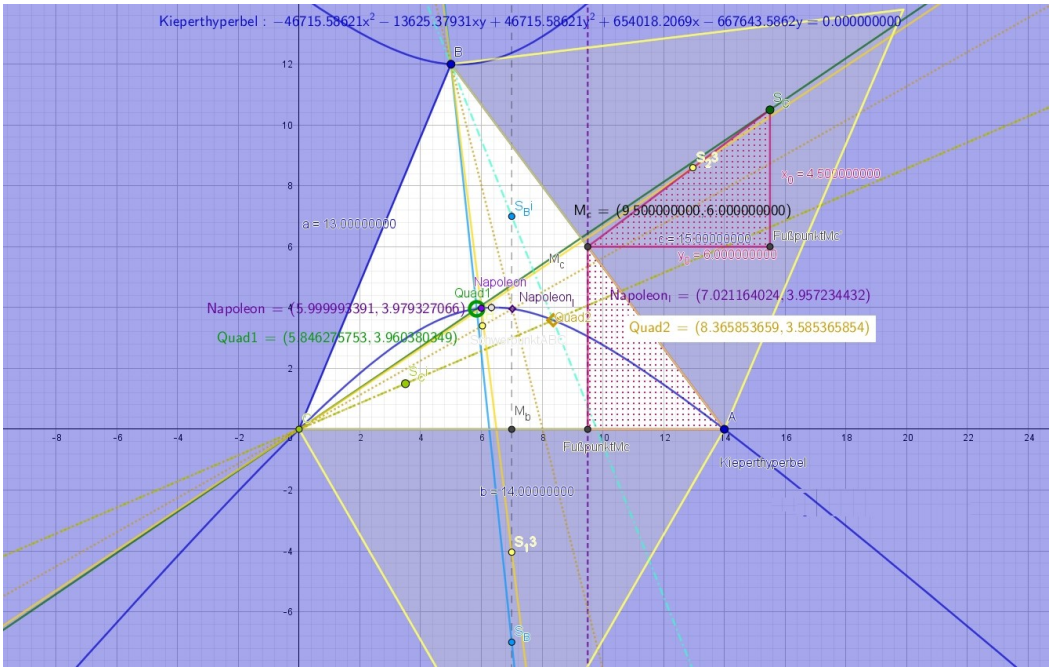

Die beiden Napoleondreicke haben denselben Schwerpunkt wie das Ausgangsdreieck ABC. Die Fläche des durch die Schwerpunkte der (von außen) aufgesetzten Dreiecke entstandenen Napoleondreicks ist stets um die Fläche des durch die von innen aufgesetzten Dreiecke entstandene 2. Napoleondreick größer als die Dreiecksfläche von ABC. Beide Napoleonpunkte liegen auf der Kiepert-Hyperbel und sind durch den (weißen) Schwerpunkt S getrennt.



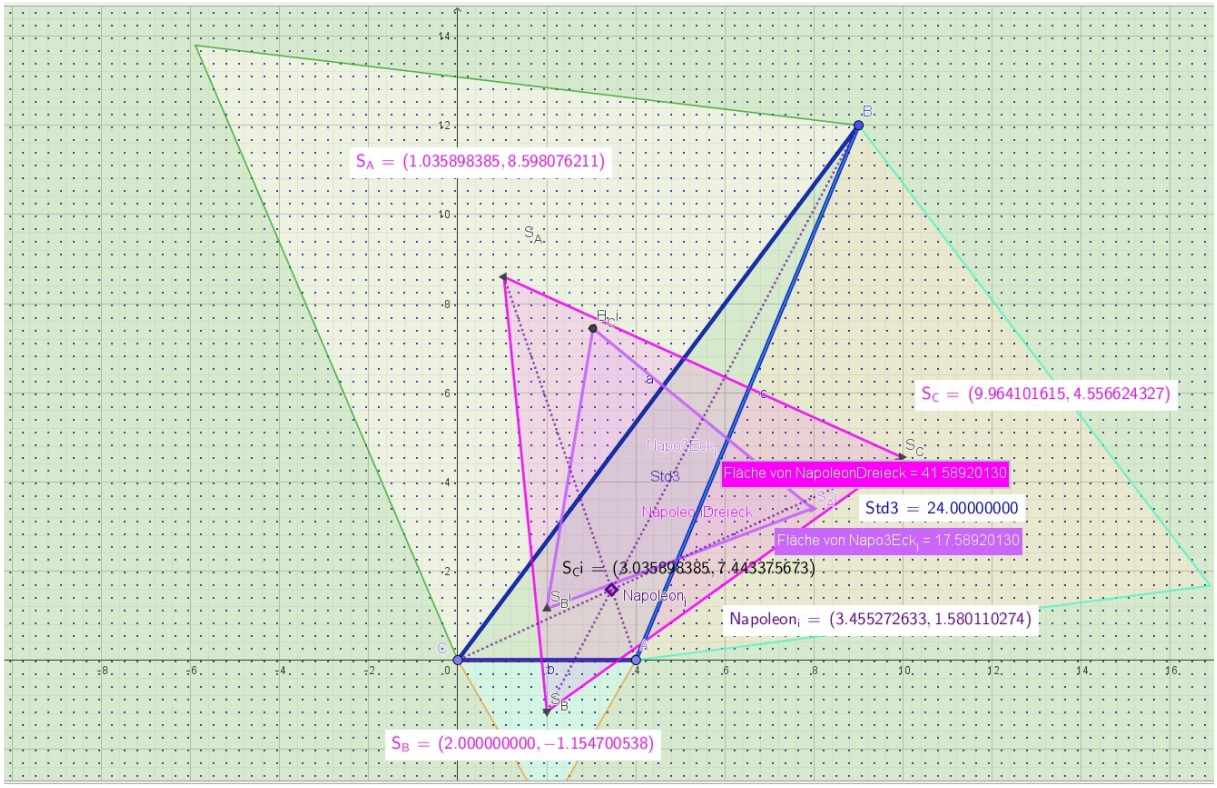

Anstelle der regulären Dreiecke (bzw. Quadrate gelb)
genügt es zwei derer Schwerpunkte $S_B$ und $S_C$ zu verwenden

Die Seitenmitte von b ist $M_b$ =(½a; 0) und die Mitte von c ist

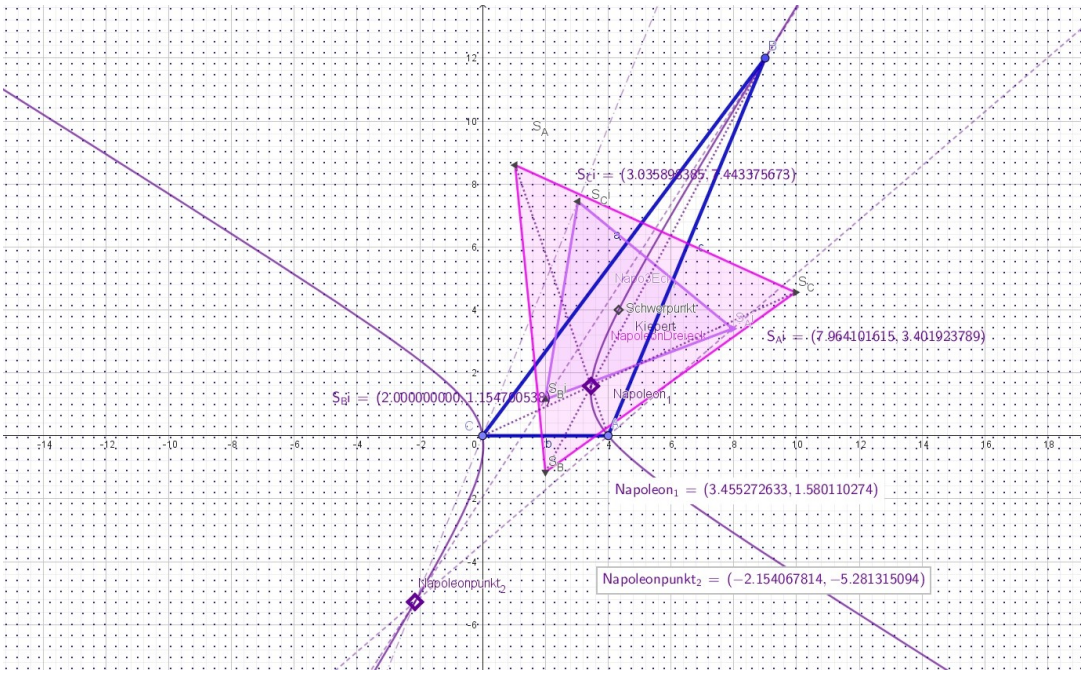
$M_c$ =½ (a + $b_x$; $b_y$) **=(½a+½$b_x$; ½$b_y$)** $2M_c = (a + b_x; b_y)$



# Stumpfwinklige Dreiecke




*Das 3. Standard-Dreick*


$S_{Ai} = (3.035899385, 7.443375673)$
$S_{Ai} = (7.964101615, 3.401923789)$
$S_{Bi} = (2.000000000, 1.154700538)$
$Napoleon_1 = (3.455272633, 1.580110274)$
$Napoleonpunkt_2 = (-2.154067814, -5.281315094)$
Schwerpunkt
Kiepert
NapoleonDreieck
Napoleon$_1$
Napoleonpunkt$_2$